Столыпинский
вестник

Научная статья
Original article
УДК 51-7

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ФРАНШИЗЫ В РАМКАХ ТЕОРЕМЫ ЭРРОУ

NUMERICAL METHODS FOR OPTIMAL DEDUCTIBLE INSURANCE COMPUTATION

Бенинг Владимир Евгеньевич, д. ф.-м. н., профессор кафедра математической статистики МГУ им. М.В. Ломоносова Россия, г. Москва shapovalovrn@my.msu.ru

Шаповалов Роман Николаевич студент 2 курса магистратуры кафедра математической статистики МГУ им. М.В. Ломоносова Россия, г. Москва shapovalovrn@my.msu.ru

Bening Vladimir Evgenievich, Ph.D., Professor, Department of Mathematical Statistics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia shapovalovrn@my.msu.ru

Shapovalov Roman Nikolaevich 2nd year student of the Master's degree Department of Mathematical Statistics of Lomonosov Moscow State University Russia, Moscow shapovalovrn@my.msu.ru

Аннотация. В данной работе рассматривается представление теоремы Эрроу, позволяющее на практике определить величину оптимальной франшизы страхового контракта. Изучены достаточные условия существования оптимальной франшизы, а также сходимости численных методов. Приведены частные примеры, демонстрирующие работоспособность предложенных подходов.

In this paper we consider a representation of Arrow's theorem that allows us to determine in practice the value of the optimal deductible of an insurance contract. Sufficient conditions for the existence of the optimal deductible and convergence of numerical methods are studied. Private examples demonstrating the performance of the proposed approaches are given.

Ключевые слова: функция полезности, страхование, теорема эрроу, численные методы

Keywords: utility function, insurance, Arrow's theorem, numerical methods.

1. Введение

В литературе по актуарной математике широко известен результат К. Эрроу об оптимальности стоп-лосс страхования в рамках теории ожидаемой полезности [3], т.е. оптимальности функции возмещения вида:

$$I_d(x) = (x - d)\mathbb{1}_{x>d}(x)$$

В дальнейшем было показано, что оптимальность сохраняется и вне теории ожидаемой полезности, так как достаточно потребовать соответствия предпочтений индивида между вероятностными распределениями стохастическому доминированию второго порядка [7]. Тем не менее, общий подход, избегающий теоремы представления предпочтений, не дает возможности количественно оценить величину оптимальной франшизы или ее свойства, в связи с чем имеет смысл рассматривать вопрос оптимальности в контексте заданного набора предпосылок, позволяющего сформулировать соответствующую теорему представления. Так, например, в работах [1, 4] берутся предпосылки, ведущие к ранго-зависимой функции полезности [9], тогда как в [6] – двойственной функции полезности [10].

В данной работе рассматриваются классические условия теоремы Эрроу и изучается возможность практического определения численного значения оптимального контракта, а также его свойств, предложены численные схемы для определения оптимальной франшизы стоп-лосс контракта.

2. Постановка задачи

Для формулировки основополагающего результата Эрроу потребуем, что предпочтения индивида определены на множестве случайных величин с конечным математическим ожиданием и удовлетворяют соответствующим предпосылкам фон Неймана – Моргенштерна [1] [5], стохастическому доминированию второго порядка [2], а его функция полезности u дважды дифференцируема. Из введенных предпосылок следует, что $\mathrm{u}' > 0,\ \mathrm{u}'' < 0$.

Рассматриваем ситуацию, в которой индивид имеет детерминированный начальный капитал s и сталкивается со случайным убытком X – неотрицательной случайной величиной с конечным математическим ожиданием. С другой стороны, компания-страховщик может предложить страховой контракт, возмещающий $\mathrm{I(x)}$, за некоторую сумму $\mathrm{f(\mathbb{E}I(X))}$. Исследуя предпочтения индивида как страхователя, можем сформулировать следующую оптимизационную задачу:

$$\max_{\mathrm{I(x)}} \mathbb{E}\mathrm{u}\left(\mathrm{s} - \mathrm{X} + \mathrm{I(X)} - \mathrm{f}\left(\mathbb{E}\mathrm{I(X)}\right)\right),$$

где выбор функции возмещения $\mathrm{I(x)}$ ограничен множеством непрерывных функций, определенных на $\mathbb{R}^+$ и удовлетворяющих: $0 \le \mathrm{I(x)} \le \mathrm{x}\ \forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}^+$.

Результат Эрроу гласит, что оптимальная $\mathrm{I}^*(\mathrm{x})$ существует и имеет вид $\mathrm{I}_{\mathrm{d}^*}(\mathrm{x}) = (\mathrm{x} - \mathrm{d}^*)\mathbb{1}_{\mathrm{x}>\mathrm{d}^*}(\mathrm{x})$, что соответствует стоп-лосс контракту с франшизой d^*.

---

[1] Аксиоматика для множества случайных величин подробно разобрана в работах Фишберна и Де Гроота

[2] Другими словами, строгое предпочтение эквивалентно стохастическому доминированию 2-го порядка

3. Определение франшизы

Следуя вариационному подходу, примененному в работах [8, 11], в процессе доказательства результата Эрроу, при дополнительных условиях, что X – абсолютно непрерывная случайная величина, f – дважды дифференцируема с $f'(x) > 1,\ f''(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}^+$, можем получить следующее уравнение, определяющее величину оптимальной франшизы:

$$u'\left(s - d - f\big(\mathbb{E}I_d(X)\big)\right) = f'\big(\mathbb{E}I_d(X)\big)\mathbb{E}\left[u'\left(s - \min(X; d) - f\big(\mathbb{E}I_d(X)\big)\right)\right] \tag{1}$$

В частности, условия на абсолютную непрерывность X достаточно, чтобы показать дифференцируемость функции $T(d)$, определенной как: $T(d)\ =\ u'\left(s - d - f\big(\mathbb{E}I_d(X)\big)\right) - f'\big(\mathbb{E}I_d(X)\big)\mathbb{E}\left[u'\left(s - \min(X; d) - f\big(\mathbb{E}I_d(X)\big)\right)\right]$

Дифференцируемость $f\big(\mathbb{E}I_d(X)\big)$ возможно проверить по определению, а дифференцируемость $\mathbb{E}\left[u'\left(s - \min(X; d) - f\big(\mathbb{E}I_d(X)\big)\right)\right]$ – по определению при помощи теоремы Лебега о мажорируемой сходимости. Производная $T(d)$ принимает вид:

$$T'(d) = -u''\left(s - d - f\big(\mathbb{E}I_d(X)\big)\right)\left(f'\big(\mathbb{E}I_d(X)\big)\mathbb{P}(X \geq d) - 1\right)^2$$

$$+f''\big(\mathbb{E}I_d(X)\big)\mathbb{P}(X \geq d)\mathbb{E}\left[u'\left(s - \min(X; d) - f\big(\mathbb{E}I_d(X)\big)\right)\right]$$

$$-f'\big(\mathbb{E}I_d(X)\big)^2\mathbb{P}(X \geq d)\int_0^d u''\left(s - x - f\big(\mathbb{E}I_d(X)\big)\right)dF_X(x)$$

Отметим, что выражение (1) позволяет на практике построить схему для численного определения d^*. В силу дифференцируемости введенной функции $T(d)$ применим метод Ньютона:

$$d_n = d_{n-1} - \frac{T(d_{n-1})}{T'(d_{n-1})}$$

При этом, при требовании дифференцируемости функций f'' и u'', $T'(d)$ также становится дифференцируема и, при выборе начальной точки в некоторой окрестности d^*, гарантируется квадратичная сходимость численного метода [2].

Также предложим численный метод простой итерации, не требующий подсчета производной $\mathrm{T}(\mathrm{d})$ и, вообще говоря, дифференцируемости f'' и u'', пользуясь тем, что уравнением для единственной неподвижной точки является, исходя из (1), является:

$$\mathrm{d} = \mathrm{s} - \mathrm{f}\big(\mathbb{E}\mathrm{I}_\mathrm{d}(\mathrm{X})\big) - (\mathrm{u}')^{-1}\left(\mathrm{f}'\big(\mathbb{E}\mathrm{I}_\mathrm{d}(\mathrm{X})\big)\mathbb{E}\left[\mathrm{u}'\left(\mathrm{s} - \min(\mathrm{X};\mathrm{d}) - \mathrm{f}\big(\mathbb{E}\mathrm{I}_\mathrm{d}(\mathrm{X})\big)\right)\right]\right) \tag{2}$$

Чтобы обосновать целесообразность такого подхода, проведем теоретический анализ асимптотической устойчивости данной неподвижной точки в частном случае экспоненциальной функции полезности.

3.1. Сходимость метода простой итерации

Пусть $\mathrm{u}(\mathrm{x}) = -\mathrm{e}^{-\alpha\mathrm{x}}$, тогда можем переписать (1) в виде:

$$\alpha\mathrm{e}^{-\alpha\left(\mathrm{s}-\mathrm{d}-\mathrm{f}(\mathbb{E}\mathrm{I}_\mathrm{d})\right)} = \mathrm{f}'\big(\mathbb{E}\mathrm{I}_\mathrm{d}(\mathrm{X})\big)\mathbb{E}\left[\alpha\mathrm{e}^{-\alpha\left(\mathrm{s}-\min(\mathrm{X};\mathrm{d})-\mathrm{f}(\mathbb{E}\mathrm{I}_\mathrm{d})\right)}\right]$$

$$\mathrm{e}^{\alpha\mathrm{d}} = \mathrm{f}'\big(\mathbb{E}\mathrm{I}_\mathrm{d}(\mathrm{X})\big)\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\alpha\min(\mathrm{X};\mathrm{d})}\right]$$

Заметим, что, в соответствии с постоянным абсолютным неприятием риска, которое отображает экспоненциальная функция полезности, значение d^* более не зависит от величины изначального капитала и платы за страховой контракт.

Вернемся к формулировке неподвижной точки (2), принимающей вид:

$$\mathrm{d} = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\mathrm{f}'\big(\mathbb{E}\mathrm{I}_\mathrm{d}(\mathrm{X})\big)\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\alpha\min(\mathrm{X};\mathrm{d})}\right]\right) \tag{3}$$

Проверим асимптотическую устойчивость, опираясь на выведенные ранее условия дифференцируемости функций по d:

$$\phi'(d) = \frac{1}{\alpha} * \frac{\left(f'\big(\mathbb{E}I_d(X)\big)\mathbb{P}(X \geq d)\alpha e^{\alpha d} - f''\big(\mathbb{E}I_d(X)\big)\mathbb{P}(X \geq d)\mathbb{E}\left[e^{\alpha\, min(X;d)}\right]\right)}{f'\big(\mathbb{E}I_d(X)\big)\mathbb{E}[e^{\alpha\, min(X;d)}]}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X \geq d)e^{\alpha d}}{E[e^{\alpha\, min(X;d)}]} - \frac{1}{\alpha} * \frac{\mathbb{P}(X \geq d)f''\big(\mathbb{E}I_d(X)\big)}{f'\big(\mathbb{E}I_d(X)\big)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X \geq d)e^{\alpha d}}{\mathbb{P}(X \geq d)e^{\alpha d} + \int_0^d e^{\alpha x} dF_X(x)} - \frac{1}{\alpha} * \frac{\mathbb{P}(X \geq d) f''\big(\mathbb{E}I_d(X)\big)}{f'\big(\mathbb{E}I_d(X)\big)}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{\int_0^d e^{\alpha x} dF_X(x)}{\mathbb{P}(X \geq d)e^{\alpha d}}} - \frac{1}{\alpha} * \frac{\mathbb{P}(X \geq d) f''\big(\mathbb{E}I_d(X)\big)}{f'\big(\mathbb{E}I_d(X)\big)}$$

$$|\phi'(d)| \leq \frac{1}{1 + \frac{\int_0^d e^{\alpha x} dF_X(x)}{\mathbb{P}(X \geq d)e^{\alpha d}}} + \frac{1}{\alpha} * \frac{\mathbb{P}(X \geq d) f''\big(\mathbb{E}I_d(X)\big)}{f'\big(\mathbb{E}I_d(X)\big)}$$

Таким образом, имеется асимптотическая устойчивость, если:

$$\frac{1}{1 + \frac{\int_0^d e^{\alpha x} dF_X(x)}{\mathbb{P}(X \geq d)e^{\alpha d}}} + \frac{1}{\alpha} * \frac{\mathbb{P}(X \geq d) f''\big(\mathbb{E}I_d(X)\big)}{f'\big(\mathbb{E}I_d(X)\big)} < 1$$

В частности, для $|\phi'(d)| < 1$ достаточно потребовать $f'' = 0$, что не противоречит сформулированным условиям. В таком случае, при последовательном применении правой части (3) имеем численный метод, сходящийся из любой начальной точки d_0.

Утверждение 1. Если $f''(d^*) = 0$, $u(x) = -e^{-\alpha x}$, $\alpha > 0$, то выражение (28) определяет асимптотически устойчивую неподвижную точку, равную d^*

Более того, если $f''(x) = 0 \; \forall x > 0$, т.е. $f'(x) = const$, можем показать следующую цепочку эквивалентных неравенств для $\forall \; d_0 < d^*$:

$$\mathbb{E}\left[e^{\alpha \, min(X;d_0)}\right] \leq \mathbb{E}\left[e^{\alpha \, min(X;d^*)}\right]$$

$$f'\left(\mathbb{E}I_{d_0}(X)\right)\mathbb{E}\left[e^{\alpha \, min(X;d_0)}\right] \leq f'\big(\mathbb{E}I_{d^*}(X)\big)\mathbb{E}\left[e^{\alpha \, min(X;d^*)}\right]$$

$$\frac{1}{\alpha} ln\left(f'\left(\mathbb{E}I_{d_0}(X)\right)\mathbb{E}\left[e^{\alpha \, min(X;d_0)}\right]\right) \leq \frac{1}{\alpha} ln\Big(f'\big(\mathbb{E}I_{d^*}(X)\big)\mathbb{E}\left[e^{\alpha \, min(X;d^*)}\right]\Big)$$

Аналогичное неравенство с противоположным знаком, можно получить для $\forall\ d_0 > d^*$. Из этих неравенств следует, что полученные условия гарантируют не только сходимость из произвольно выбранного начального значения d_0, но и приближение к корню с одной стороны, вне зависимости от числа итераций:

Утверждение 2. Если $f'(x) = const$, то для $\forall\ d_0 < (>) d^*$, верно $\forall n \in \mathbb{N}\ d_n \leq (\geq)\ d^*$, где d_n является результатом вычисления правой части (3) в точке d_{n-1}

4. Численные эксперименты

Для практической иллюстрации применимости численных методов рассмотрим ряд примеров. Для целей практической проверки результатов был написан соответствующий код для вычисления функций и двух описанных численных методов с помощью средств языка программирования R. Формулы реализованы в том же виде, как встречаются в текущей работе, за исключением следующего представления, позволяющего добиться лучшей точности при численном интегрировании в связи с переходом конечному пределу интегрирования:

$$\mathbb{E}\left[u'\left(s - min(X; d) - f\left(\mathbb{E}I_d(X)\right)\right)\right]$$
$$= u'\left(s - d - f\left(\mathbb{E}I_d(X)\right)\right)\mathbb{P}(X \geq d)$$
$$+ \int_0^d u'\left(s - x - f\left(\mathbb{E}I_d(X)\right)\right) dF_X(x)$$

Метод Ньютона вне окрестности d^* демонстрирует линейную сходимость. Предложенный метод простой итерации, вообще говоря, демонстрирует лучший характер сходимости вне окрестности d^*, но в окрестности корня уступает методу Ньютона.

Пример 1

Пусть $f(x) = (1+\theta)x$, где $\theta > 0$ – рисковая надбавка.

$$e^{\alpha d} = (1+\theta)\mathbb{E}\left[e^{\alpha\, min(X;d)}\right] = (1+\theta)\left(\mathbb{P}(X \geq d)e^{\alpha d} + \int_0^d e^{\alpha x} dF_X(x)\right)$$

Пусть X имеет экспоненциальное распределение с параметром λ, тогда:

$$e^{\alpha d} = (1+\theta)\left(e^{-\lambda d}e^{\alpha d} + \int_0^d e^{\alpha x}\lambda e^{-\lambda x}dx\right)$$

$$\frac{1}{1+\theta}e^{\alpha d} = e^{(\alpha-\lambda)d}\frac{\alpha}{\alpha-\lambda} - \frac{\lambda}{\alpha-\lambda}$$

Так, например, положим $\theta = 2/5$, $\alpha = 4$, $\lambda = 2$, тогда $d = \frac{1}{2}ln(\frac{1}{5}(7+\sqrt{14})) \approx 0.3823457$.

Предложенный метод простой итерации сходится из точки $d_0 = 10$ до решения с точностью до 6 знака за 34 итерации (Рисунок 1). Метод Ньютона достигает заданной точности за 43 итерации (Рисунок 2). Из $d_0 = 1$, находящегося ближе к корню, метод Ньютона эффективнее и сходится за 7 итераций, тогда как предложенному методу требуется 29 итераций.

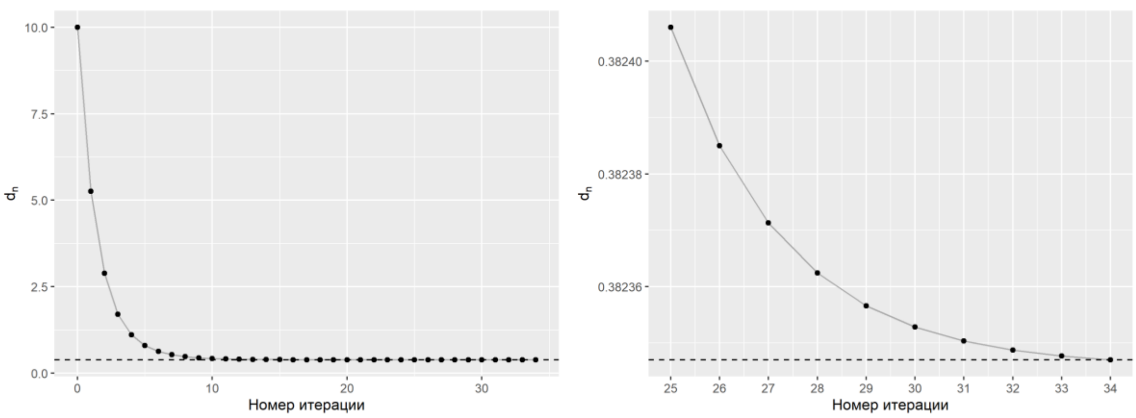

Рисунок 1: Сходимость предложенного метода простой итерации в примере 1

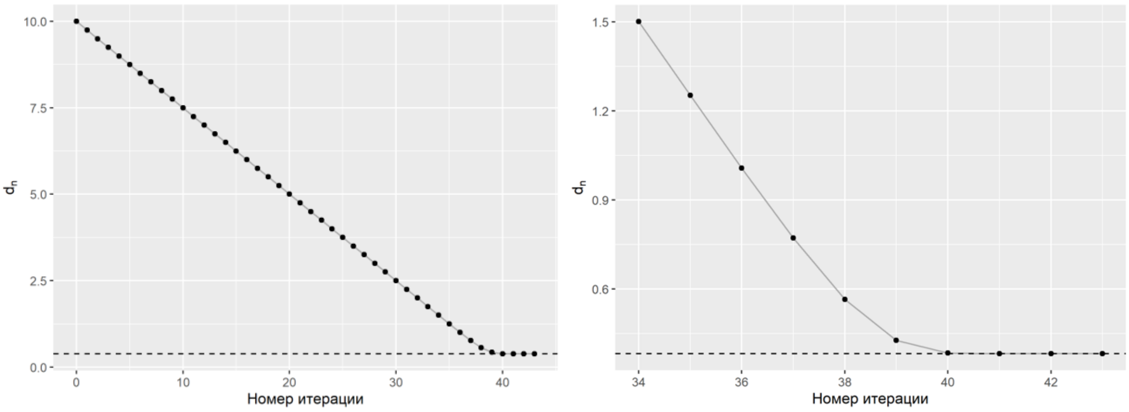

Рисунок 2: Сходимость метода Ньютона в примере 1

Наличие сходящихся численных методов позволяет проанализировать чувствительность оптимального значения d^* к параметрам уравнения. Так, например, в примере 1 зависимость от α и λ при $\theta = 2/5$ отражена на Рисунок 3. В данном случае, получаем, что d экспоненциально возрастает с уменьшением параметра λ, и, симметрично, с уменьшением α – коэффициента абсолютного неприятия риска. d^* по θ, в свою очередь, возрастает и выпукла вверх, как можно заметить на Рисунок 4.

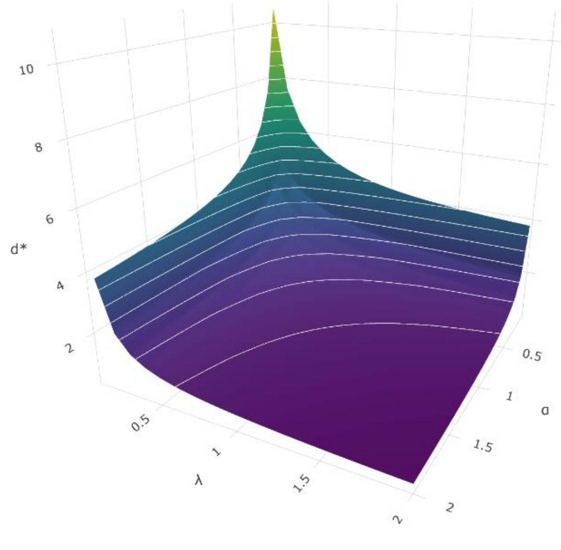

Рисунок 3: зависимость d^* от параметров α и λ при $\theta = 2/5$ в примере 1

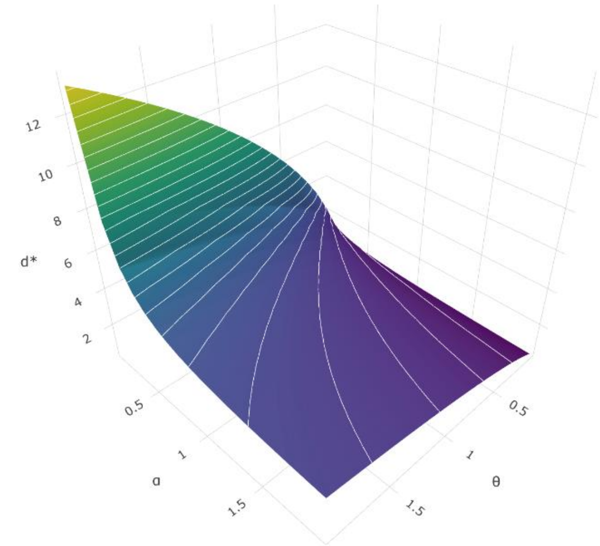

Рисунок 4: Зависимость d^* от параметров

θ и α при $\lambda = 0.5$ в примере 1

Пример 2

Экспоненциальная функция полезности не зависит от изначального уровня капитала, поэтому рассмотрим $u(x) = ln(x)$, где, также как и в примере 1, положим, что $f(x) = (1+\theta)x$, а X имеет экспоненциальное распределение с параметром λ. В таком случае, уравнение (1) принимает вид:

$$\frac{1}{s - d - (1+\theta)\mathbb{E}I_d(X)} = (1+\theta)\mathbb{E}\left[\frac{1}{s - min(X; d) - (1+\theta)\mathbb{E}I_d(X)}\right]$$

Допуская, что $\mathbb{P}(s - min(X; d) - (1+\theta)\mathbb{E}I_d(X) > 0) = 1$, можем воспользоваться следующим представлением:

$$\mathbb{E}(Z^{-1}) = \int_0^\infty \mathbb{E}\, e^{-\gamma Z} d\gamma,$$

где Z - строго положительная случайная величина.

Также, для удобства записи введем обозначение $t = s - (1+\theta)\mathbb{E}I_d(X)$. Тогда:

$$\frac{1}{t - d} = (1+\theta)\int_0^\infty \mathbb{E}\, e^{-\gamma(t - min(X; d))} d$$

Распишем интеграл в правой части и учтем распределение X:

$$\int_0^\infty \mathbb{E}\, e^{-\gamma(t-min(X;d))} d\gamma = \int_0^\infty e^{-\gamma t}\, \mathbb{E} e^{\gamma\, min(X;d)} d$$

$$= \int_0^\infty e^{-\gamma t} \left[e^{\gamma d} \mathbb{P}(X \geq d) + \int_0^d e^{\gamma x}\, dF_X(x) \right] d\gamma$$

$$= \int_0^\infty e^{-\gamma t} \left[e^{(\gamma-\lambda)d} + \lambda \int_0^d e^{(\gamma-\lambda)x}\, dx \right] d\gamma$$

$$= \int_0^\infty e^{-\gamma t} \left[e^{(\gamma-\lambda)d} + \frac{\lambda}{\gamma-\lambda}\left(e^{(\gamma-\lambda)d} - 1\right) \right] d\gamma$$

$$= \int_0^\infty e^{-\gamma t} \left[-\frac{\lambda}{\gamma-\lambda} + \frac{\gamma}{\gamma-\lambda} e^{(\gamma-\lambda)d} \right] d\gamma$$

$$= -\int_0^\infty \frac{\lambda}{\gamma-\lambda} e^{-t\gamma}\, d\gamma + e^{-\lambda d} \int_0^\infty \frac{\gamma}{\gamma-\lambda} e^{(d-t)\gamma}\, d\gamma$$

$$= -\lambda e^{-\lambda t} \int_{-\lambda}^\infty \frac{e^{-tz}}{z} dz + e^{-\lambda t} \int_{-\lambda}^\infty \frac{z+\lambda}{z} e^{(d-t)z} dz$$

$$= -\lambda e^{-\lambda t} \int_{-\lambda t}^\infty \frac{e^{-z}}{z} dz + e^{-\lambda t} \left[-\frac{e^{-(d-t)\lambda}}{d-t} + \lambda \int_{-\lambda(t-d)}^\infty \frac{e^{-z}}{z} dz \right]$$

$$= \lambda e^{-\lambda t} \left[Ei(\lambda t) - Ei(\lambda(t - d)) \right] + \frac{e^{-\lambda d}}{t-d},$$

где Ei - интегральная показательная функция.

Таким образом, получаем следующее уравнение:

$$\frac{1}{\mathrm{t}-\mathrm{d}} = (1+\theta)\left[\lambda \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{t}} \left[\mathrm{Ei}(\lambda \mathrm{t}) - \mathrm{Ei}\big(\lambda(\mathrm{t}-\mathrm{d})\big) \right] + \frac{\mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{d}}}{\mathrm{t}-\mathrm{d}} \right],$$

где $\mathrm{t} = \mathrm{s} - (1+\theta)\mathrm{EI}_{\mathrm{d}}(\mathrm{X})$.

В силу отсутствия возможности выразить d через элементарные функции, вновь воспользуемся численными методами. Так как нас интересует зависимость от уровня капитала, то вторым параметром рассмотрим $1/\lambda$, соответствующий мат.

ожиданию экспоненциально распределенного убытка, см. Рисунок . В соответствии с убывающим коэффициентом неприятия риска, d^* возрастает с ростом капитала. Рисунок иллюстрирует возрастающий и выпуклый вверх характер зависимости d^* от θ, как и в примере 1.

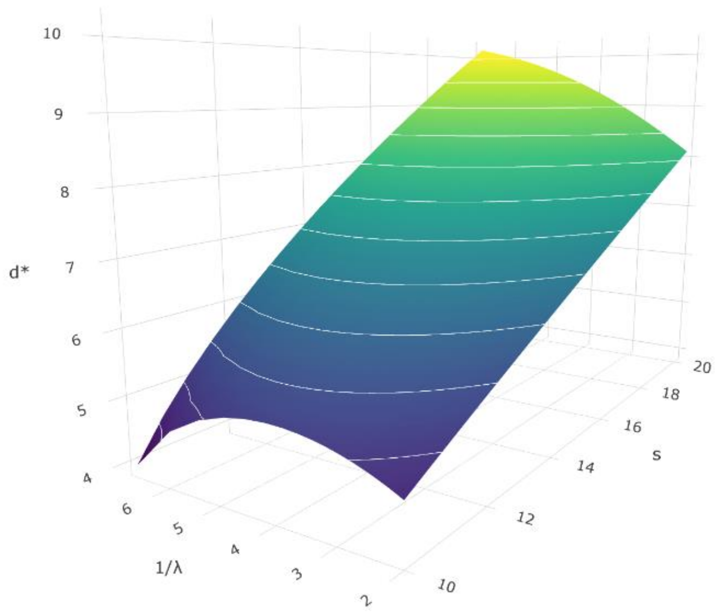

Рисунок 5: зависимость d^*от параметров s и $1/\lambda$ при $\theta = 0.5$ в примере 2

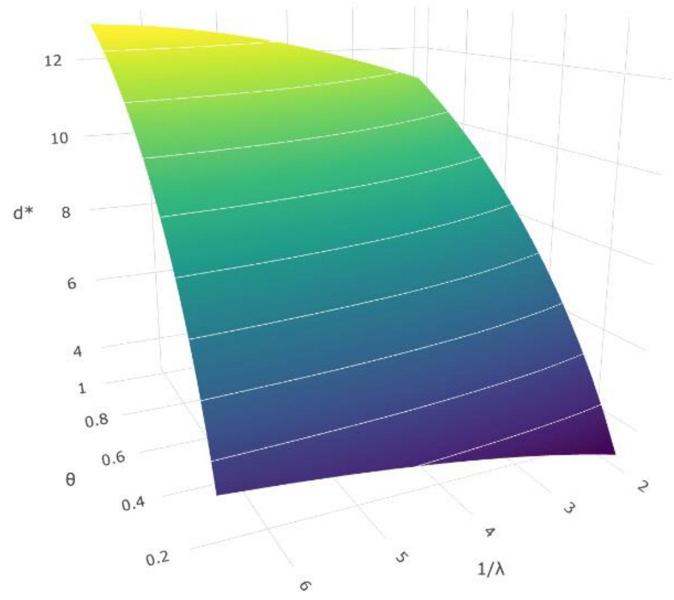

Рисунок 6: зависимость d^* от параметров θ и $1/\lambda$ при

$s = 20$ в примере 2

Для полноты изложения также продемонстрируем сходимость обоих численных методов, положив $s = 20$, $\lambda = 0.15$, $\theta = 0.7$ с начальной точкой $d_0 = 10$. Метод Ньютона сходится быстрее – за 5 итераций, тогда как предложенный метод простой итерации – за 16, см. Рисунок 7.

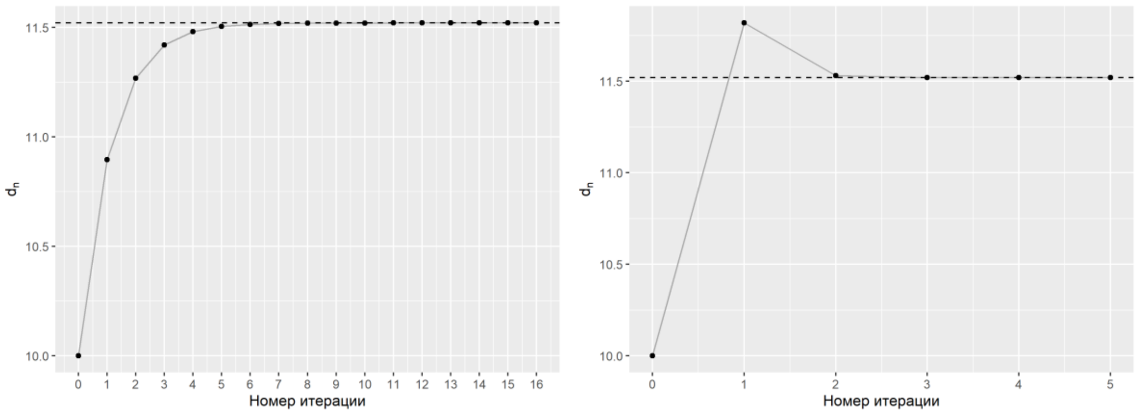

Рисунок 5: Сходимость численных методов в примере 2 (предложенны простой итерации – слева; метод Ньютона – справа)

Выводы

Предложенные численные методы показывают хорошую сходимость и применимы для различных функций полезности и случайных величин в рамках рассмотренных условий. Существенным ограничением выступает вид функции премии за страховой контракт, фактически, сужающий применимость результатов до единственного известного страхового принципа – принципа ожидаемого значения, рассмотренного в приведенных примерах. В связи с этим дальнейший интерес представляет исследование численных подходов определения оптимального страхового контракта в более общих случаях, в частности, когда премия зависит не только от математического ожидания потерь, а также за пределами теории ожидаемой полезности.

Использованные источники:

1. Госсуб М. Оптимальное страхование в условиях ожидаемой полезности, зависящей от ранга // Страхование: математика и экономика. 2019. (87). С. 51-66.

2. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин, Москва: Наука, 1989. 429 с.
3. Эрроу К. Дж., Хаканссон Н. Х. Очерки по теории принятия рисков // Финансовый журнал. 1972. № 5 (27). С. 1193.
4. Бернард С. [и др.]. Оптимальный страховой дизайн в условиях ожидаемой полезности, зависящей от ранга // Математические финансы. 2015. № 1 (25). С. 154-186.
5. Дегрут М. Х. Оптимальные статистические решения / М. Х. Дегрут, изд-во классической библиотеки Уайли, Хобокен, Нью-Джерси: Wiley-Interscience, 2004. 489 с.
6. Доэрти Н. А ., Экхоудт Л. Оптимальное страхование без ожидаемой полезности: дуальная теория и линейность договоров страхования // Журнал рисков и неопределенности. 1995. № 2 (10). С. 157-179.
7. Голье К., Шлезингер Х. Теорема Эрроу об оптимальности вычетов: подход со стохастическим доминированием, 1996.
8. Промислоу С. Д., Янг В. Р. Объединяющая структура для оптимального страхования // Страхование: математика и экономика. 2005. № 3 (36). С. 347-364.
9. Квиггин Дж. Обобщенная теория ожидаемой полезности / Дж. Квиггин, Дордрехт: Springer Netherlands, 1993.
10. Яари М. Э. Дуальная теория выбора в условиях риска // Эконометрика. 1987. № 1 (55). С. 95.
11. Янг В. Р. Оптимальное страхование по принципу премии Вана // Страхование: математика и экономика. 1999. № 2 (25). С. 109-122.

Использованные источники:

1. Ghossoub M. Optimal Insurance under Rank-Dependent Expected Utility // Insurance: Mathematics and Economics. 2019. (87). С. 51–66.
2. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин, Москва: Наука, 1989. 429 с.

3. Arrow K. J., Hakansson N. H. Essays in the Theory of Risk-Bearing // The Journal of Finance. 1972. № 5 (27). С. 1193.
4. Bernard C. [и др.]. Optimal Insurance Design under Rank-Dependent Expected Utility // Mathematical Finance. 2015. № 1 (25). С. 154–186.
5. DeGroot M. H. Optimal statistical decisions / M. H. DeGroot, Wiley classics library ed-е изд., Hoboken, NJ: Wiley-Interscience, 2004. 489 с.
6. Doherty N. A., Eeckhoudt L. Optimal insurance without expected utility: The dual theory and the linearity of insurance contracts // Journal of Risk and Uncertainty. 1995. № 2 (10). С. 157–179.
7. Gollier C., Schlesinger H. Arrow’s theorem on the optimality of deductibles: A stochastic dominance approach 1996.
8. Promislow S. D., Young V. R. Unifying framework for optimal insurance // Insurance: Mathematics and Economics. 2005. № 3 (36). С. 347–364.
9. Quiggin J. Generalized Expected Utility Theory / J. Quiggin, Dordrecht: Springer Netherlands, 1993.
10. Yaari M. E. The Dual Theory of Choice under Risk // Econometrica. 1987. № 1 (55). С. 95.
11. Young V. R. Optimal insurance under Wang’s premium principle // Insurance: Mathematics and Economics. 1999. № 2 (25). С. 109–122.

Для цитирования: Бенинг В.Е., Шаповалов Р.Н. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ФРАНШИЗЫ В РАМКАХ ТЕОРЕМЫ ЭРРОУ// Научный сетевой журнал «Столыпинский вестник» №6/2024.