Столыпинский
вестник

Научная статья
Original article
УДК 51.7

ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЭКОНОМИКЕ

APPLICATIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN ECONOMICS

Черняева Татьяна Николаевна, к.ф.-м.н., доцент кафедры «Математика», Иркутский государственный университет путей сообщения (ФГБОУ ВО ИрГУПС), г. Иркутск, e-mail: chetn2021@yandex.ru

Хованский Богдан Николаевич, студент 1-го курса факультета «Управление на транспорте и информационные технологии», специальность «Эксплуатация железных дорог», Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, e-mail: damenik2000@mail.ru

Михайлов Егор Евгеньевич, студент1-го курса, факультета «Управление на транспорте и информационные технологии», специальность «Эксплуатация железных дорог», Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, e-mail: qwerty29egor@mail.ru

Chernyaeva Tatiana Nikolaevna, Ph.D., Associate Professor in the Department of Mathematics, Irkutsk State Transport University, Irkutsk, mail: chetn2021@yandex.ru

Khovansky Bogdan Nikolaevich, 1st year student of "Transport Management and Information Technology", specialty "Operation of railways", Irkutsk State

Transport University, Irkutsk, e-t mail: damenik2000@решение mail.ходе ru e-mail: damenik2000@mail.ru

Mikhailov Egor Evgenievich, 1st year student, Faculty of Transport Management and Information Technology, specialty "Operation of Railways", Irkutsk State Transport University, Irkutsk, e-mail: qwerty29egor@mail.ru

Аннотация. В предложенной статье рассмотрены приложения дифференциальных уравнений в экономике. Рассмотрены примеры моделей экономических процессов, основу которых составляют обыкновенные дифференциальные уравнения. В приведенных задачах содержится краткое описание необходимой экономической теории, модели в виде дифференциального уравнения, решения этого уравнения и анализа полученных результатов.

Abstract. In the proposed article, applications of differential equations in economics are considered. Examples of models of economic processes based on ordinary differential equations are considered. The above tasks contain a brief description of the necessary economic theory, a model in the form of a differential equation, the solution of this equation and the analysis of the results obtained.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, методы моделирования, математические модели в экономике, спрос и предложения, логистическая кривая

Keywords: differential equations, modeling methods, mathematical models in economics, supply and demand, logistic curve.

Введение

Актуальность данной темы состоит в том, что в современной науке дифференциальные уравнения, несомненно, играют исключительно важную роль. Они имеют множество применений в различных областях, одной из которых является экономика. Инструменты теории дифференциальных уравнений используются для описания многих социально-экономических моделей. Поэтому для студентов-экономистов крайне важно усвоить эту теорию и уметь применять её на практике, а для студентов-математиков эти модели интересны с точки зрения многочисленных приложений математической теории.

Практическое значение состоит в том, что дифференциальные уравнения широко используются в задачах экономической динамики, которые не только учат взаимосвязь переменных от времени, но и учат их связь со временем. Этими задачами являются: модель Эванса - установление равновесной цены товара на рынке и динамическая модель экономического роста, называемая как модель Солоу. В модели Эванса рассмотрим рынок продукта, где время является непрерывным. Пусть d(t), s(t), p(t) — спрос, предложение и цена продукта в момент времени t соответственно. Обозначим, что спрос и предложение являются линейными функциями цены, т.е. $d(p) = a - bp, a, b > 0$ — спрос падает с ростом цены, а $s(p) = \alpha + \beta p, \alpha, \beta > 0$ — предложение увеличивается по мере роста цены. Естественным соотношением является a> α, то есть при нулевой цене спрос превышает предложение. Задача Солоу изучает экономику в целом (без структурных подразделений). Задача в полной мере отражает важнейшие макроэкономические аспекты производственного процесса. Актуальность этого текста заключается в рассмотрении использования дифференциальных уравнений в экономике.

1. Приложение дифференциальных уравнений в экономике

Экономическая теория основывается на экономических законах, выражающихся в количественных соотношениях между величинами, характеризующими экономическую систему или процесс. Такие законы позволяют исследовать реальные экономические системы на основе математических моделей. Построение и изучение этих моделей является предметом математической экономики, рассматривающей экономику как сложную динамическую систему.

Для изучения математической модели экономики, помимо экономической науки, необходимо также овладение математическими методами, среди которых важную роль играет аппарат дифференциальных уравнений. Экономическая модель обычно представляет собой сложную нелинейную зависимость между экономическими величинами, и её явную форму трудно установить напрямую. При наличии устойчивых законов малые изменения величин можно приближенно заменить дифференциалами. Затем нелинейная связь между этими величинами заменяется более простой линейной зависимостью между этими величинами и их производными соответственно. Эти соотношения представляют собой дифференциальные уравнения, с помощью которых можно математически моделировать экономическую систему или процесс.

Наиболее распространенные математические модели в экономике связаны с дифференциальными уравнениями.

Примеры моделей экономических процессов на основе дифференциальных уравнений приведены в зависимости от сложности используемых уравнений (от простых к сложным). Рассмотрим модель процесса, которая требует использования теории дифференциальных уравнений с разделяемыми и разделяемыми переменными. К таким вопросам относятся, например, вопросы об эффективности рекламы, демографических изменениях, зависимости спроса или предложения от цен на товары, зависимости функций спроса от эластичности, истощении земных ресурсов или приросте населения, росте банковских вкладов и т.д.

Пример 1. (Эффективность рекламы)

Компания подготовила к продаже новый продукт. Для его продвижения была запущена рекламная кампания, в результате которой о новинке узнали 2500 из 10 000 потенциальных покупателей. После этого информация о новом продукте распространяется путем передачи информации от одного лица к другому. Пусть x(t) обозначает количество покупателей, узнавших о новом товаре в момент времени t. Изменение этой величины будет пропорционально числу покупателей, знающих и не знающих о новом товаре, и интервалу времени dt, интервалу, течение которого происходит это изменение, т.е.

$dx = kx(n-x)dt,$ где n – общее количество потенциальных новых покупателей (в нашем случае n = 10000), k — коэффициент масштабирования(примем k $2*10^{-6}$масштабирование человека/ день),
n-x – количество покупателей

Тогда решение

$$x(t) = \frac{n}{1+(\gamma-1)e^{-nkt}} = \frac{10000}{1+3\times e^{-2\times 10^{-2}t}} \ .$$

Если предположить, что t = 20 дней, то x (20) = 3321, то есть за 20 дней о новом товаре узнают примерно 3321 покупатель.

Теперь предположим, что t = 30, тогда о новом продукте узнают примерно x (30) = 3778 покупателей.

Пример 2. (Спрос и предложение)

Спрос и предложение – экономические категории товарного производства, возникающие и функционирующие на рынке, в сфере товарного обмена. Рассмотрим какой-нибудь товар. Обозначим через p цену на товар, а через $\frac{dp}{dt} = p'$ – так называемую тенденцию формирования цены (производную цены во времени). Пусть p обозначает цену продукта, обозначающую так называемую тенднцию. Рассмотрим случай, когда спрос и предложение зависят от скорости изменения цены. В зависимости от различных факторов спрос и предложение могут иметь разные ценовые и ценообразования. Одним из экономических законов товарного производства является закон спроса и предложения, заключающийся во взаимообусловленности спроса и предложения и их объективном соответствии желаниям. Для экономики имеет смысл, что спрос равен предложению, то есть s(p, p') = q(p, p'). В этом случае цена $p = p^0$ называется равновесной ценой. Обе функции s и q линейны относительно переменных p и p'. Поэтому решение проблемы спроса и предложения приводит к необходимости использования теории линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

Например, функции спроса и предложения имеют и вид:

$$\mathrm{q} = 3 \cdot \frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dt}} - 2\mathrm{p} + 28 - \mathrm{e}^{-3\mathrm{t}}$$

Равновесие между спросом и предложением сохраняются при условии:

$$4 \cdot \frac{dp}{dt} + p + 19 = 3 \cdot \frac{dp}{dt} - 2p + 28 - e^{-3t}$$

или, когда выполняется равенство

$$\frac{dp}{dt} + 3p = -e^{-3t} + 9 \qquad .(1)$$

В результате получено линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами. Для его решения применим метод И. Бернулли: общее решение ищем в виде $p = u \cdot v$, где $u = u(t), v = v(t)$. Тогда $p' = u'v + uv'$. о Подставляя p и p' в (1), приходим к уравнению

$$\frac{du}{dt} \cdot v + u \cdot \left(\frac{dv}{dt} + 3v\right) = -e^{-3t} + 9 \qquad (2)$$

Ищем v:

$$\frac{dv}{dt} + 3v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -3dt \Rightarrow ln|v| = -3t \Rightarrow v = e^{-3t}$$

Подставляя найденное значение v в уравнение (2), найдем :

$$\frac{du}{dt}\cdot e^{-3t} = -e^{-3t} + 9 \Rightarrow \frac{du}{dt} = -1 + 9e^{3t}$$

$$u = -t + 3e^{3t} + c.$$

Общее решение уравнения (1) запишется в виде

$$p = e^{-3t}(-t + 3e^{3t} + c).$$

Найдем зависимость равновесной цены от времени, если в начальный момент p = 23:

Таким образом, искомая зависимость имеет вид

$$p = e^{-3t}(-t + 3e^{3t} + 20)$$

Чтобы узнать является ли данная равновесная цена устойчивой, найдем $\lim\limits_{t\to\infty} p$ $\to$ при этом получающуюся в ходе вычислений неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$ будем раскрывать по правилу Лопиталя:

$$\lim_{t\to\infty} p = \frac{t+3e^{3t}+20}{e^{3t}} = \lim_{t\to\infty}\frac{1+9e^{3t}}{3e^{3t}} = \lim_{t\to\infty}\frac{27e^{3t}}{9e^{3t}} = 3.$$

Следовательно, равновесная цена является устойчивой.

Пример 3. (Модель рынка с прогнозируемыми ценами)

В модели используется теория линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Обычно в простой модели рыночной экономики спрос и предложение зависят от текущей цены товара. На практике, однако, ценовые тенденции и темпы изменения цен зависят друг от друга. В модели с непрерывными и дифференцируемыми по времени t функции эти признаки описываются первой и второй производными функции стоимости p(t) соответственно. Например, пусть функция спроса s(t) и функция предложения q(t) имеют следующие зависимости от цены p:

$$q(t) = 2p'' + 4p' + 4p + 6$$

$$s(t) = p'' - 2p' - 6p + 36$$

Приемлемые зависимости реалистичны, так как если цена растет (p" > 0), то интерес к товару на рынке - падает, и наоборот, если цена падает, то и интерес к товару растёт. Кроме того, быстрый рост цен может отпугнуть покупателей, поэтому первый член производной функции цены вводится с отрицательным знаком. В то же время скорость изменения цены влияет на увеличение предложения (увеличение цены увеличивает предложение), поэтому член, содержащий p', входит в q(t) со знаком плюс. Тогда установим зависимость цены от времени. Как и в предыдущем примере, воспользуемся условием s(t) = q(t) для состояния рыночного равновесия. На основании этого условия получаем уравнение

$$p'' - 2p' - 6p + 36 = 2p'' + 4p' + 4p + 6$$

или

$$p'' + 6p' + 10p = 30 \qquad (3)$$

Получено линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его общее решение состоит из общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

Общее решение однородного уравнения

$$p'' + 6p' + 10p = 0,$$

найдем исходя из вида корней характеристического уравнения

$$k^2 + 6k + 10 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = -3 \pm i$$

Так как корни характеристического уравнения являются комплексными, то общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$\overline{p} = e^{-3t}(c_1 cost + c_2 sint),$$

где c1 и c2 – произвольные постоянные.

В качестве частного решения возьмем постоянную установившуюся цену $\bar{p} = p_n$.

Подставляя это значение в формулу (3), найдем, что p̅=3. Таким образом, общее решение уравнения (3) имеет вид:

$$p(t) = e^{-3t}(c_1 cost + c_2 sint) + 3.$$

Делаем заключение: все интегральные кривые имеют горизонтальную асимптоту p = 3. Это означает, что все цены стремятся к устоявшейся цене $\bar{p} = 3$ с колебаниями около неё, причем амплитуда колебаний затухает со временем.

Из рассмотренных задач можно сделать вывод, что методы моделирования с использованием дифференциальных уравнений широко применяются для решения экономических задач. Анализ полученных общих и специальных решений позволяет выявить резервы повышения эффективности производства и установления соотношения спроса и предложения.

Заключение

Мы рассмотрели использование дифференциальных уравнений в экономике. С помощи модели Эванса, мы рассмотрели, как применять дифференциальные уравнения в процессах естественного роста, таких как объем производства, реклама, динамика рыночных цен и т. д. Поэтому дифференциальные уравнения являются одним из наиболее часто используемых видов вычислений в деятельности человека.

Таким образом, с помощью приведенных выше моделей продемонстрированы описания некоторых социально-экономических моделей с использованием аппаратов дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения используются для расчета выпуска, равновесной цены, функций спроса и предложения и многого другого.

Библиографический список

1. Кузнецов Ю.А. Математическое моделирование экономических циклов: факты, концепции, результаты // Экономический анализ: теория и практика. 2011. 18(224). – с. 42-57.
2. Минюк, С.А. Высшая математика для экономистов / С.А. Минюк, С.А. Самаль, Л.И. Шевченко. – Минск: Элайда, 2007. – 511 с.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М., ГИФМЛ, 1958. - 468 с.
4. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчсиление. М.: Наука, главная редакция физико-математической литературы, 1965. - 424 с.
5. De la Croix D., Michel P. A Theory of Economic Growth. Dynamics and Policy in Overlapping Generations. - Cambridge University Press, 2004.
6. Черняева Т.Н., Миндеева С.В Приложения обыкновенных дифференцианальных уравнений для решения экономических задач //Сб: Наука и практика: интеграция знаний. Материалы научно-практической конференции. НОУ ВО «Московский экономический институт». 2015. С.157-159

References

1. Kuznetsov Yu.A. Mathematical modeling of economic cycles: facts, concepts, results // Economic analysis: theory and practice. 2011. 18(224). – pp. 42-57.
2. Minyuk, S.A. Higher mathematics for economists / S.A. Minyuk, S.A. Samal, L.I. Shevchenko. – Minsk: Elaida, 2007. – 511 p.
3. Stepanov V.V. Course of differential equations. M., GIFML, 1958. - 468 p.
4. Elsholts L.E. Differential equations and variational calculus. M.: Nauka, main editorial office of physical and mathematical literature, 1965. - 424 p.

5. De la Croix D., Michel P. Theory of economic growth. Dynamics and politics in overlapping generations. Cambridge University Press, 2004.
6. Chernyaeva T.N., Mindeeva S.V. Applications of ordinary differential equations for solving economic problems //Sb: Science and Practice: Integration of knowledge. Materials of the scientific and practical conference. KNOW-how of the "Moscow Economic Institute". 2015. pp.157-159

Для цитирования: Черняева Т.Н., Хованский Б.Н., Михайлов Е.Е. Приложения дифференциальных уравнений в экономике// Научный сетевой журнал «Столыпинский вестник» №1/2023.