Столыпинский

вестник

Научная статья

Original article

УДК 519.652

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ В ОБЛАСТИ ИНЖЕНЕРНЫХ РАСЧЕТОВ

STATISTICAL ANALYSIS IN THE FIELD OF ENGINEERING CALCULATIONS

Вагенлейтнер Анастасия Олеговна, студентка 3 курса, Факультет информационных технологий и электроники, Пензенский государственный университет, Россия, г. Пенза

Копнов Даниил Вячеславович, студент 3 курса, Факультет информационных технологий и электроники, Пензенский государственный университет, Россия, г. Пенза

Сальникова Алена Игоревна, Студентка 4 курса, Факультет информационных технологий и электроники, Пензенский государственный университет, Россия, г. Пенза

Vagenleytner Anastasia Olegovna, 3rd year student, Faculty of Information Technology and Electronics, Penza State University, Russia, Penza

Kopnov Daniil Vyacheslavovich, 3rd year student, Faculty of Information Technology and Electronics, Penza State University, Russia, Penza

Salnikova Alena Igorevna, 4rd year student, Faculty of Information Technology and Electronics, Penza State University, Russia, Penza

Аннотация

В статье рассматривается возможность применения метода по нахождению различных физических величин с помощью операций статистического анализа.

Зачастую, при выполнении исследований, возникает необходимость уточнить значения параметра, которые занимают промежуточное положение между уже полученными с помощью эксперимента или моделирования. Это можно осуществить двумя путями:

– проведением дополнительных экспериментов и созданием новых моделей;

– обращением к операциям статистического анализа.

Первый вариант является достаточно энергозатратным и трудоемким. И, поскольку не всегда существует необходимость в результатах высокой точности, на практике часто применяют именно второй вариант.

Summary

The article considers the possibility of applying the method for finding various physical quantities using statistical analysis operations.

Often, when performing research, it becomes necessary to clarify the values of the parameter, which occupy an intermediate position between those already obtained through experiment or simulation. This can be done in two ways:

– carrying out additional experiments and creating new models;

– appeal to the operations of statistical analysis.

The first option is quite energy-intensive and labor-intensive. And, since there is not always a need for high-precision results, it is the second option that is often used in practice.

Ключевые слова: инженерные расчеты, статистический анализ, аппроксимация, интерполяция, коэффициент детерминации, корреляция данных, баллистическая модель, относительные погрешности

Keywords: engineering calculations, statistical analysis, approximation, interpolation, coefficient of determination, data correlation, ballistic model, relative errors

Статистический анализ позволяет получить необходимые результаты с заданной степенью точности, и при этом упростить расчет и минимизировать труд и расходы на исследование. Для этих целей обычно используют процедуры интерполяции и аппроксимации.

Интерполяция – в вычислительной математике нахождение неизвестных промежуточных значений некоторой функции по имеющемуся дискретному набору ее известных значений. Наиболее широко-применимой является интерполяция многочленами, которая в свою очередь подразделяется на:

– линейную интерполяцию – интерполяцию алгебраическим двучленом;

– интерполяцию по формулам Ньютона – формулам, применяющиеся для полиномиального интерполирования;

– интерполяцию по методу Лагранжа - использование многочлена минимальной степени, принимающего заданные значения в заданном наборе точек;

– интерполяция кубическим сплайном - гладкой функцией, область определения которой разбита на конечное число отрезков, на каждом из которых она совпадает с некоторым кубическим многочленом (полиномом) [3] ;

Интерполяция с помощью полинома высокой степени на всем отрезке экспериментальных данных называется глобальной. Наряду с ней широко применяется локальная интерполяция – построение отдельного полинома между каждой парой соседних точек. Этот метод имеет название сплайн-интерполяции [1]. Ее преимуществом является достижение наименьших погрешностей при удовлетворении условия непрерывности функции и ее производных.

В свою очередь, сплайн-интерполяция также может проводиться различными способами – в зависимости от вида функции, соединяющей пары точек. В данной работе рассмотрены следующие типы сплайн-интероляции:

– линейная сплайн-интерполция – интерполяция полиномами первой степени;

– интерполяция по соседним точкам – построение кусочной функции, значение которой в каждой точке равно значению в ближайшем узле, т.е. интерполяция нулевой степени;

– кубическая сплайн-интерполяция – интерполяция кубическим полиномом;

– интерполяция кубическим сплайном.

В вычислениях наряду с интерполяцией используется аппроксимация. Аппроксимация - это научный метод, состоящий в замене одних объектов другими, близкими к исходным, но более простыми. Она дает возможность исследовать числовые характеристики и качественные свойства объекта, сводя задачу к изучению более простых или более удобных объектов. Она позволяет получить функцию, описывающую зависимость между известными значениями приближенным методом [2]. Чаще всего для отыскания аппроксимационной функции используют метод наименьших квадратов, который представлен следующими типами [6]:

– линейная аппроксимация;

– экспоненциальная аппроксимация;

– полиномиальная аппроксимация;

– степенная аппроксимация;

– логарифмическая аппроксимация;

– линейная фильтрация.

Из данных типов в работе будут рассмотрены линейная и полиномиальная аппроксимации.

При полиномиальной аппроксимации прослеживается зависимость: чем выше степень полинома, тем лучше качество аппроксимации. Но ошибочно будет полагать, что наиболее точного результата можно достичь, взяв полином как можно большей степени [1]. Расчет полиномиальных коэффициентов при высоких степенях сопряжен с большими погрешностями, объясняемыми феноменом Рунге [5], что приводит к осцилляциям аппроксимационной прямой на определяемых интервалах. Обычно наиболее точным и приближенным к действительности является полином, также называемый интерполяционным полиномом, степени N-1, где N – число известных значений в выборке, которая представлена в виде массива, состоящего из пар чисел (в случае функции нескольких переменных – из групп чисел).

Далее на конкретных примерах рассмотрена применимость описанного метода по нахождению промежуточных значений при баллистическом моделировании.

В качестве исследуемой модели в обоих примерах выступает бронебойный снаряд с заданным набором характеристик.

В первом примере решается задача по определению скорости полета снаряда в определенной точке траектории. Имеется выборка из 8 значений скорости в зависимости от дальности полета с шагом в 500 м:

Таблица 1 – Пример 1. Выборка начальных значений

S, м	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000
V, м/с	280	260	240	230	215	205	200	198.75

Вычисление промежуточных значений скорости может быть необходимо для оценки способности снаряда пробить определенную толщину брони на заданном расстоянии.

Во втором примере определяется коэффициент силы лобового сопротивления в определенный момент полета снаряда. Имеется выборка из 6 значений коэффициента силы лобового сопротивления Cx в зависимости от числа Маха (Mx), соответствующего скоростям полета от 100 до 600 м/с:

Таблица 2 – Пример 2. Выборка начальных значений

Mx	0.293	0.587	0.880	1.174	1.467	1.761
Cx	0.122	0.123	0.123	1.515	1.066	0.859

Отыскание промежуточных значений коэффициента силы лобового сопротивления может понадобиться для определения других баллистических характеристик, а так же при необходимости корректировки траектории движения снаряда.

С помощью формул, полученных в результате аппроксимации и различных интерполяционных зависимостей находятся значения необходимого параметра в произвольной точке. Далее эти данные сравниваются со значением, полученным из баллистической модели полета снаряда, учитывающей его геометрические характеристики, начальные параметры выстрела и математическую модель атмосферы.

При оценке полученных аппроксимационных функций достоверными были приняты те, чей коэффициент детерминации превысил 80%, поскольку в этом случае корреляция данных будет более 90% [5].

Прежде всего в среде MatLab была написана программа для определения баллистических коэффициентов. На ее основе построена модель движения снаряда, которая с помощью известных баллистических зависимостей, дифференциальных уравнений движения и математической модели атмосферы, определяет траекторию движении снаряда и характеристики данного движения, в том числе скорость [4]. С ее помощью были смоделированы графики искомых параметров (рисунки 1-2).

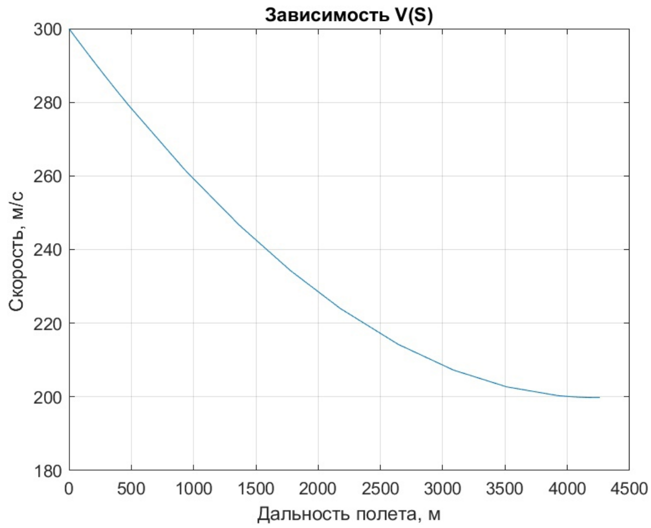

Рисунок 1 – Баллистическая модель изменения скорости полета снаряда

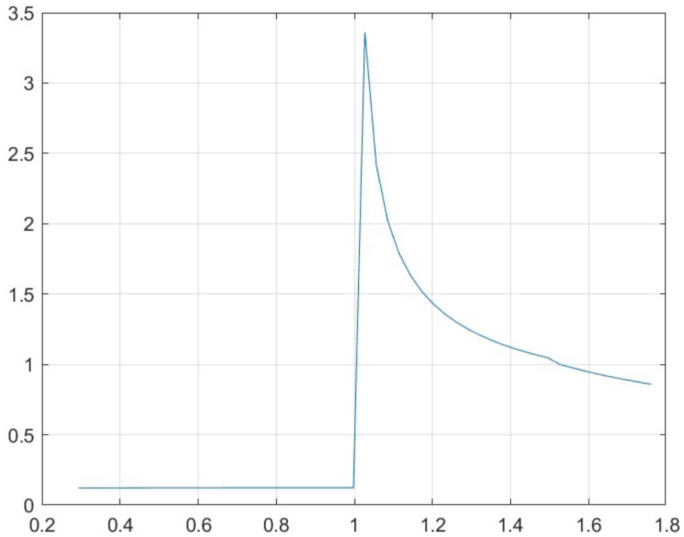

Рисунок 2 – Баллистическая модель зависимости коэффициента силы лобового сопротивления от числа Маха

В качестве эталонных значений для проверки рассматриваемой статистической модели на этих графиках были выбраны точки, с которых сняты значения исследуемых параметров:

1) Скорость снаряда на расстоянии 2225 м от дульного среза ствола, в соответствии с моделью, составила 224 м/с.

2) При числе Маха, равном 1.5, коэффициент силы лобового сопротивления, в соответствии с моделью, получился равным 1.046.

Для каждого примера на графиках были отображены точки исходной выборки. Далее, с помощью средств программного анализа в среде MatLab, были определены функциональные зависимости каждого типа аппроксимации. Отображение полученных зависимостей также представлено на графиках (рисунки 3-4).

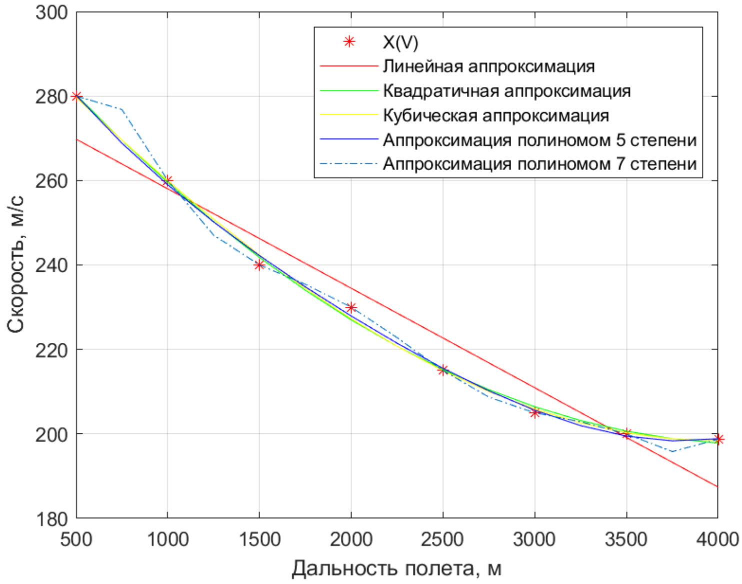

Рисунок 3 – График кривых аппроксимации для скорости

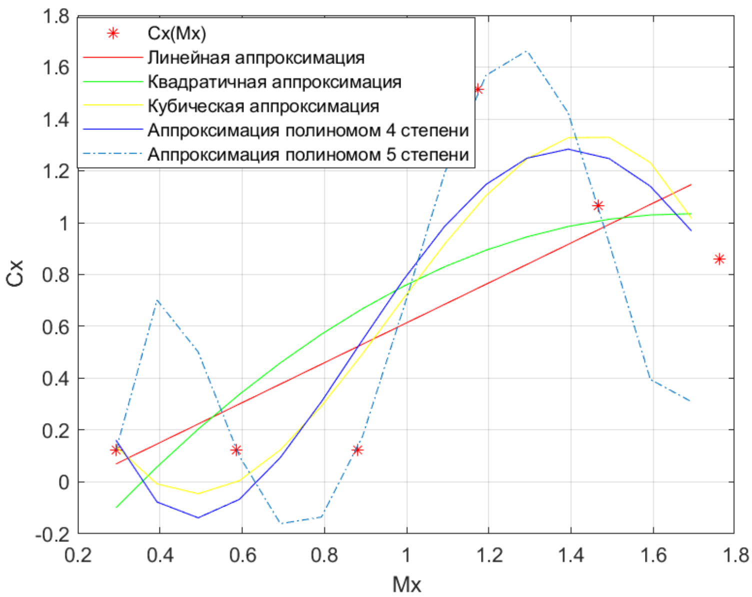

Рисунок 4 – График кривых аппроксимации для Сх

В таблице 3 для каждого типа аппроксимации приведены: математическое выражение функциональных зависимостей; коэффициент детерминации, определенный на основе множественного коэффициента корреляции данных [2]; вычисленное значение скорости снаряда в точке, соответствующей 2225 метрам.

Таблица 3 – Сводные данные по аппроксимации для 1 примера

Тип аппроксимации	Формула зависимости	Коэффициент детерминации	Значение в выбранной точке, м/с
Линейная	$f_1 = -0{,}023542 * S + 281.56$	0.937	229
Квадратичная	$f_2 = 0.00000598 * S^2 - 0.0505 * S + 304$	0.9975	221
Кубическая	$f_3 = 4.29 * 10^{-10} * S^3 + 3.08 * 10^{-6} * S^2 - 0.00449 * S + 301.34$	0.9977	221
Полиномиальная 5 степени	$f_4 = -8.97 * 10^{-17} * S^5 + 1.635 * 10^{-12} * S^4 - 9.3837 * 10^{-9} * S^3 + 2.7896 * 10^{-5} * S^2 - 0.070788 * S + 300.69$	0.9982	222
Полиномиальная 7 степени	$f_5 = 3.269 * 10^{-21} * S^7 - 5.333 * 10^{-17} * S^6 + 3.558 * 10^{-13} * S^5 - 1.2483 * 10^{-9} * S^4 + 2.1575 * 10^{-6} * S^3 - 0.002669 * S^2 + 1.4133 * S + 1.25$	0.9992	224

По аналогии те же данные для второго примера сведены в таблицу 2. Последний столбец содержит вычисленное по каждой формуле значение коэффициента силы лобового сопротивления, соответствующее числу Маха Мх = 1,5.

Таблица 4 – Сводные данные по аппроксимации для 2 примера

Тип аппроксимации	Формула зависимости	Коэффициент детерминации	Значение в выбранной точке
Линейная	$f_1 = 0.7696 * M - 0.15571$	0.4968	0.999
Квадратичная	$f_2 = -0.5873 * M^2 + 1.9758 * M - 0.6275$	0.55	1.01

Кубическая	$f_3 = -3.1043 * M^3 + 8.977 * M^2 - 6.4954 * M + 1.3473$	0.772	1.33
Полиномиальная 4 степени	$f_4 = 1.9414 * M^4 - 11.08 * \mathrm{M}^3 + 20.127 * \mathrm{M}^2 - 12.574 * \mathrm{M} + 2.382$	0.7822	1.24
Полиномиальная 5 степени	$\mathrm{f}_5 = 37.993 * \mathrm{M}^5 - 193.15 * \mathrm{M}^4 + 363.28 * \mathrm{M}^3 - 310.17 * \mathrm{M}^2 + 118.55 * \mathrm{M} - 15.781$	1	0.88

На рисунках 5 и 6 представлены графики отклонений аппроксимаций от изначальной выборки данных каждого примера. Они позволяют визуально оценить погрешности каждого рассматриваемого типа.

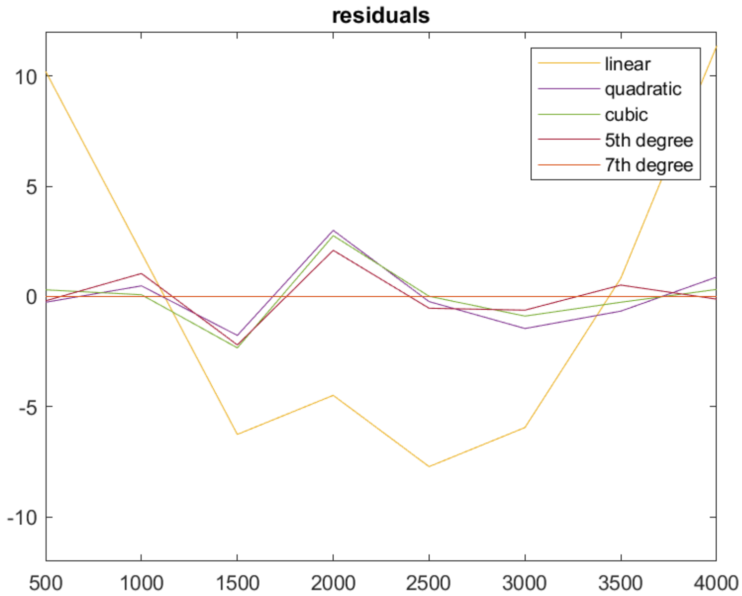

Рисунок 5 – График отклонений 1

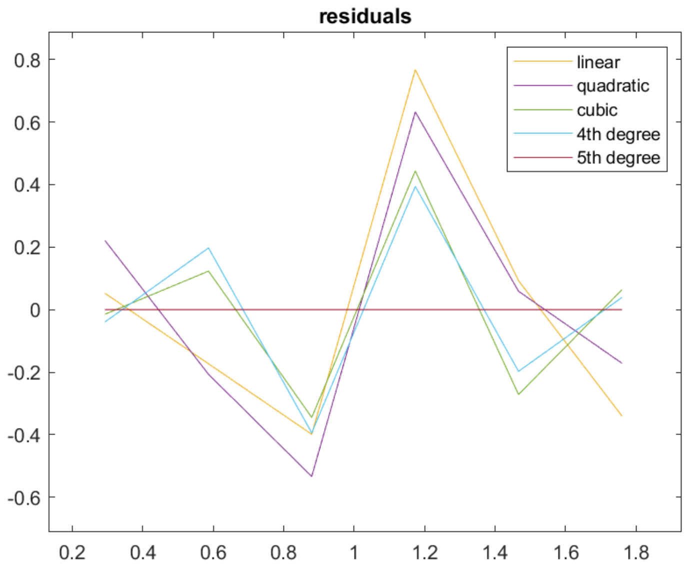

Рисунок 6 – График отклонений 2

Проанализировав приведенные графики и полученные значения коэффициентов детерминации, можно утверждать, что:

1. Для аппроксимации зависимости между дальностью полета снаряда и его скоростью можно использовать любой из представленных выше полиномов без значительной потери точности вычислений. Коэффициент детерминации каждого из них превышает 0.9, что говорит о высокой точности статистической модели. Этот же вывод можно получить, рассмотрев график, представленный на рисунке 5 – даже для линейной аппроксимации отклонения на порядок-два ниже рассматриваемых значений. Но все же наиболее приближенным к действительности является в данном случае полином 7 степени, поскольку он соответствует глобальному интерполяционному полиному степени N-1. Он практически на 100% корреллирует с исходными данными.

2. Для аппроксимации зависимости между числом Маха и коэффициентом силы лобового сопротивления применим только полином 5 степени, являющийся глобальным интерполяционным полиномом. Остальные аппроксимационные зависимости не соответствуют заданной точности – их коэффициенты детерминации принимают значения от 0.5 до 0.78, что соответствует лишь 70-80% корреляции. Это же можно увидеть на графике,

представленном на 6 рисунке – отклонения всех полиномов, кроме полинома 5 степени, принимают значения того же порядка, что и рассматриваемые.

Значения скорости снаряда и коэффициента силы лобового сопротивления в выбранных точках, также были определены, базируясь на 4 видах локальной интерполяции, что графически представлено на рисунках 7 и 8 соответственно.

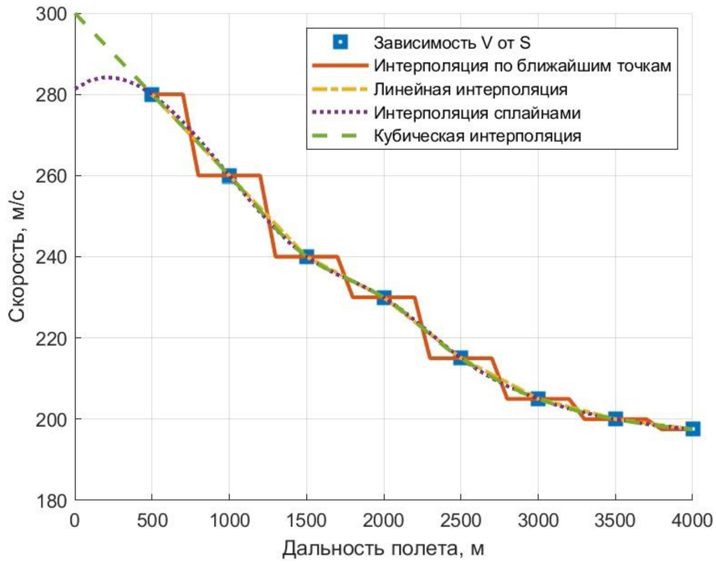

Рисунок 7 – График кривых интерполяции для скорости

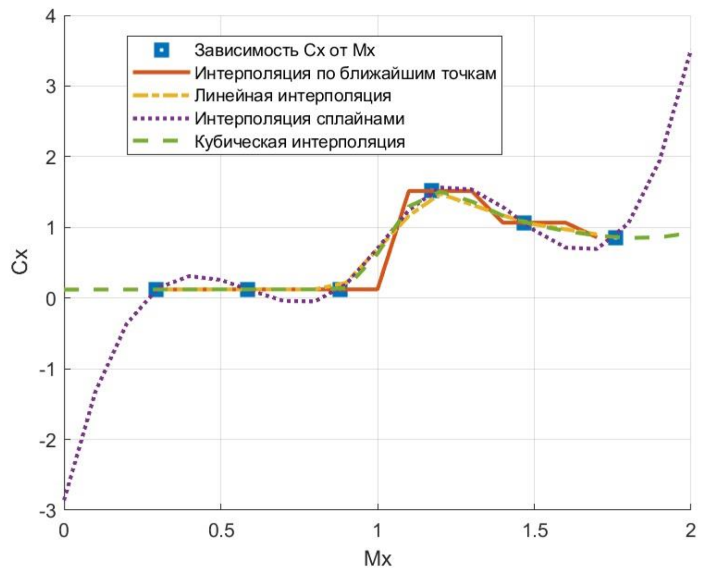

Рисунок 8 – График кривых интерполяции для Cx

Можно видеть, что хотя все интерполяционные кривые проходят через узлы первоначальной выборки, они имеют абсолютно разную форму, и соответственно разную степень приближения [6]. Точность интерполяции была оценена с помощью относительных погрешностей.

Значения скорости, полученные в точке 2225 м и соответствующие им погрешности представлены в таблице 5:

Таблица 5 – Сводные данные по интерполяции для 1 примера

Тип интерполяции	Значение в точке, м/с	Погрешность, %
Линейная интерполяция	223.25	0.33
Интерполяция по соседним точкам	230	2.68
Кубическая интерполяция	223.32	0.30
Интерполяция кубическим сплайном	223.58	0.19

Значения коэффициента силы лобового сопротивления, полученные при числе Маха, равном 1.5 и соответствующие им погрешности представлены в таблице 6:

Таблица 6 – Сводные данные по интерполяции для 2 примера

Тип интерполяции	Значение в точке	Погрешность, %
Линейная интерполяция	1.0428	0.29
Интерполяция по соседним точкам	1.0660	1.92
Кубическая интерполяция	1.0346	1.08
Интерполяция кубическим сплайном	0.9601	8.20

После сравнения эталонных значений и значений, полученных с помощью интерполяции и аппроксимации, можно заключить, что данная статистическая модель вполне применима в различных ситуациях, требующих инженерных расчетов. Значения полученные при вычислениях, имеют высокую степень точности (вплоть до 99%), что позволяет признать возможным применение данной вычислительной модели при необходимости.

Но при этом следует учитывать, что для разных ситуаций точность будет варьироваться в зависимости от возможности сведения взаимосвязей между исходными величинами к табличным функциям. Для получения наилучших результатов следует выбирать статистическую операцию с помощью которой будет проводиться анализ, следующим образом:

– отобразить имеющиеся узловые точки в выбранной системе координат;

– визуально представить кривую, которую можно было бы провести через данные точки;

– в зависимости от характера данной кривой, определиться с видом статистического анализа: аппроксимация и глобальная интерполяция – если кривая гладкая, плавная и монотонная, или сплайн-интерполяция – если кривая ломанная, прерывистая и имеет резкие переходы между узлами.

В любом случае, если задача по нахождению промежуточного значения в конкретном случае не подразумевает стопроцентной точности, а требует получения величины с допуском определенной погрешности, применение данной модели позволит упростить расчеты, сократить время на вычисления и минимизировать затраты на эксперимент.

Литература

1. С.В. Знаменский. «Численная оценка точности интерполяции несложных элементарных функций». Программные системы: теория и приложения, 2018, 9:4(39), с.69-92.
2. А.М. Данилов Интерполяция, аппроксимация, оптимизация: анализ и синтез сложных систем: моногр. / А.М. Данилов, И.А. Гарькина. – Пенза: ПГУАС, 2014. – 168 с.
3. М.Е. Ильин Аппроксимация и интерполяция. Методы и приложения: учеб. пособие / М.Е. Ильин; Рязань: РГРА, 2010. – 57 с.
4. С.В. Беневольский Баллистика: Учебник / Беневольский С.В., Бурлов В.В., Казаковцев В.П. и др. – Пенза: ПАИИ, 2005. – 510с.
5. С.М. Пригарин Численный анализ (интерполяция, численное дифференцирование и интегрирование): учеб. пособие / С.М. Пригарин; Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2018 г.
6. И. С. Шорохова Статистические методы анализа: учеб. пособие / И. С. Шорохова, Н. В. Кисляк, О. С. Мариев; М-во образования и науки РФ, Екатеринбург: изд-во Урал. ун-та, 2015. — 300 с.

Literature

1. S.V. Znamensky. "Numerical evaluation of the accuracy of interpolation of uncomplicated elementary functions". Software systems: theory and applications, 2018, 9:4(39), pp.69-92.
2. A.M. Danilov Interpolation, approximation, optimization: analysis and synthesis of complex systems: monograph. / A.M. Danilov, I.A. Garkin. - Penza: PGUAS, 2014. - 168 p.
3. M.E. Ilyin Approximation and interpolation. Methods and applications: textbook. allowance / M.E. Ilyin; Ryazan: RGRA, 2010. - 57 p.
4. S.V. Benevolsky Ballistics: Textbook / Benevolsky S.V., Burlov V.V., Kazakovtsev V.P. etc. - Penza: PAII, 2005. – 510p.
5. 5.S.M. Prigarin Numerical analysis (interpolation, numerical differentiation and integration): textbook. allowance / S.M. Prigarin; Novosibirsk: CPI NSU, 2018
6. IS Shorokhova Statistical methods of analysis: textbook. allowance / I. S. Shorokhova, N. V. Kislyak, O. S. Mariev; Ministry of Education and Science of the Russian Federation, Yekaterinburg: Ural Publishing House. un-ta, 2015. - 300 p.

Для цитирования: Вагенлейтнер А.О., Копнов Д.В., Сальникова А.И. Статистический анализ в области инженерных расчетов// Научный сетевой журнал «Столыпинский вестник» №5/2022