Столыпинский
вестник

Научная статья
Original article
УДК 539.3

КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О НАВИВКЕ ПРУЖИНЫ

FINITE ELEMENT APPROACH TO SOLVING THE PROBLEM OF WINDING A SPRING

Пронькин Евгений Сергеевич, студент, Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э.Баумана, Москва.

Pronkin Evgeny Sergeevich, student, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

Аннотация: В настоящей статье рассмотрен конечноэлементный подход к решению задач о навивке пружины, в частности, указана сущность метода, рассмотрен метод переменных параметров упругости, метод начальных напряжений и метод начальных деформаций. Получены физические зависимости между параметрами, характеризующими пружины, приведены диаграммы-сравнения методов начальных деформаций и напряжений. В конце статьи дан вывод о возможностях использования каждого метода.

Annotation: In this article, a finite element approach to solving problems of winding a spring is considered, in particular, the essence of the method is indicated, the method of variable elasticity parameters, the method of initial stresses and the method of initial deformations are considered. The physical dependences between the parameters characterizing the springs are obtained, comparison diagrams of the methods of initial deformations and stresses are given. At the end of the article, a conclusion is given about the possibilities of using each method.

Ключевые слова: навивка пружин, параметры упругости, метод начальных напряжений, метод начальных деформаций, метод переменных параметров упругости.

Key words: winding of springs, elasticity parameters, method of initial stresses, method of initial deformations, method of variable elasticity parameters.

Витые пружины принадлежат к числу наиболее распространенных упругих элементов машиностроения. Они применяются в самых различных конструкциях как аккумуляторы упругой энергии, в амортизирующих, возвратно-подающих и во многих других механических устройствах. Наиболее часто пружины занимают мало места в узлах конструкций, однако, именно они зачастую определяют долговечность, безотказность и надежность работы механизма или машины.

В зависимости от вида и величины воспринимаемых рабочих нагрузок существует большое многообразие форм и конструкций витых пружин. Вопросы, возникающие в процессе разработки, освоении и внедрении технологии изготовления новых конструкций витых пружин в основном связаны с обеспечением требуемых грузовых и геометрических характеристик изделия.

Работа витых пружин характеризуется тем, что в них используют только упругие свойства стали. Возможная величина упругой деформации пружины определяется ее конструкцией – диаметром проволоки, числом рабочих витков, диаметром пружины и величиной внешней силы, воздействующей на контактные участки.

Для определения напряжений, деформаций и сил, требуемых для образования витка, воспользуемся методом конечных элементов, решаемом в Ansys 17.2.

Задача линейной теории упругости в перемещениях всегда сводится к решению уравнений для ансамбля (1) [1]:

$$[K]\{\delta\} - \{R\} = 0, \tag{1}$$

где $[K]$ — матрица жёсткости, $\{\delta\}$ — вектор узловых перемещений, $\{R\}$ — вектор, содержащий все силы, обусловленные внешними нагрузками, начальными напряжениями и деформациями и т. д.

При выводе этого соотношения использовался закон линейной упругости в виде (2):

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\} = 0, \tag{2}$$

где $\{\sigma\}$ — вектор напряжений, $[D]$ — матрица упругих постоянных, $\{\varepsilon\}$ — вектор деформаций, $\{\varepsilon_0\}$ — вектор начальных деформаций, обусловленных температурными воздействиями, усадкой, кристаллизацией, другими возможными факторами, $\{\sigma_0\}$ — вектор остаточных напряжений, которые, например, можно замерить, но нельзя предсказать без знания полной истории нагружения материала.

Кроме того, предполагалось существование линейной связи между деформациями и перемещениями, перемещения считались непрерывными и уравнения равновесия удовлетворялись приближенно.

При решении задач о малых деформациях, в которых используются другие, возможно и нелинейные, определяющие уравнения, следует изменить только соотношение (1). Новое соотношение можно записать в виде (3):

$$F(\{\sigma\}, \{\varepsilon\}) = 0, \tag{3}$$

Если удастся найти такое решение уравнения (1), что при соответствующем подборе одного или нескольких входящих в (2) параметров $[D]$, $\{\varepsilon_0\}$ или $\{\sigma_0\}$ это уравнение и соотношение (3) удовлетворяются при одинаковых значениях напряжений и деформаций, то полученное решение будет искомым.

Очевидно, что при решении целесообразно использовать итерационный метод. Какая из трех вышеупомянутых величин будет подбираться в процессе итераций, зависит от:

а) метода решения линейной задачи;

б) физического закона связи между напряжениями и деформациями.

Если при итерациях подбирается матрица $[D]$, то приходим к известному методу переменных параметров упругости Биргера [2]. Если же подбираются $\{\varepsilon_0\}$ или $\{\sigma_0\}$, то имеем так называемые методы начальных деформаций или начальных напряжений.

Во многих случаях не удается установить соотношения типа (3) для полных деформаций и напряжений, но можно вывести их для приращений этих величин $\Delta\{\sigma\}$ и $\Delta\{\varepsilon\}$. В этих случаях итерационные методы применяются для каждого приращения нагрузки (или времени при ползучести). Методы приращений можно использовать в сочетании с любым из ранее рассмотренных методов.

Из изложенного ранее видно, что параметры $[D]$, $\{\varepsilon_0\}$ или $\{\sigma_0\}$ являются весьма важной частью исходных данных для программы решения задачи линейной теории упругости. Поэтому такие программы представляют собой основу решения любой нелинейной задачи. На данной стадии несущественно, составлены ли эти программы на основе конечно-элементной дискретизации или нет. Изложенные ниже методы можно использовать в сочетании с любым другим способом дискретизации (например, конечно-разностным) при условии, что берутся одинаковые исходные данные [3].

Метод переменной жесткости можно использовать в случае, когда связь между напряжениями и деформациями (2), характеризующую поведение материала, можно представить в форме (1), где матрица упругости зависит от достигнутого уровня деформации, т. е. имеет вид (4):

$$[D] = [D(\{\varepsilon\})] = [D(\{\delta\})] = 0, \tag{4}$$

Так как матрица упругости влияет на окончательный вид матрицы жесткости ансамбля, приходим к уравнению (5)

$$\{\psi\} = [K(\{\delta\})]\{\delta\} - \{R\} = 0 \qquad (5)$$

Данное уравнение можно решить различными итерационными методами.

Очевиден следующий простой итерационный процесс. Сначала предполагается $\{\delta\}_0 = 0$, вычисляется $[K(\{\delta\}_0)] = [K_0]$ и определяется $\{\delta\}_1 = [K_0]^{-1}\{R\}$. Процесс повторяется в соответствии с формулой (6)

$$\{\delta\}_n = [K]_{n-1}^{-1}\{R\} \qquad (6)$$

до тех пор, пока перемещения перестанут изменяться.

Если определяющие уравнения таковы, что соотношение типа (4) может быть записано только для приращений напряжений и деформаций, то описанный процесс следует применить для приращений нагрузки, отсчитываемых от ранее достигнутого значения [4].

В любом случае можно пользоваться стандартной программой решения задач линейной теории упругости при условии, что матрица $[D]$ симметрична. Это требование весьма существенно, так как в программе обычно используется свойство симметрии.

Одним из существенных недостатков методов переменных параметров является то, что на каждом шаге приходится заново строить матрицы жесткости и решать полученные уравнения. Если программа использует прямые методы решения, то такой подход становится очень неэкономичным и более приемлемыми оказываются другие методы, которые описаны в следующей статье.

Если определяющие уравнения разрешимы относительно напряжений, т.е. (3) имеет вид (7):

$$\{\sigma\} = f(\{\varepsilon\}) \qquad (7)$$

В таком случае, соотношение (2) для упругого материала можно привести к форме (3), задавая соответствующим образом $\{\sigma_0\}$. Так как $\{\sigma_0\}$ влияет на силы $\{R\}$, приходим к решению уравнения (8):

$$\{\psi\} = [K_0]\{\delta\} - R(\{\delta\}) = 0 \qquad (8)$$

Итерационный процесс проводится следующим образом. Сначала находится:

$$\{\delta_0\} = [K_0]^{-1}\{R_0\} \qquad (9)$$

где $\{R_0\}$ соответствует приложенным нагрузкам. Определяются напряжения $\{\sigma_0\}$, необходимые для приведения упругого решения в соответствие с реальными напряжениями при достигнутых деформациях [5]. Далее с учетом начального напряжения с помощью соотношения находится $\{R\}_1$ и определяется:

$$\{\delta_1\} = [K_0]^{-1}\{R_1\}$$
$$\{\delta_n\} = [K_0]^{-1}\{R_n\}$$

Процесс продолжается до тех пор, пока решение не перестанет изменяться.

Другой удобный метод состоит в определении только изменений $\{R\}$, обусловлениых изменениями требуемого начального напряжения [6]. В этом случае $\{\delta_0\}$ находится, как и ранее, но:

$$\Delta\{\delta_1\} = [\mathrm{K}_0]^{-1}\Delta\{\mathrm{R}_1\}$$

Итерации продолжаются до тех пор, пока величина $\Delta\{\delta\}_\mathrm{n}$ не станет достаточно близкой к нулю.

При вычислениях более удобен последний подход, который, кроме того, имеет ясный физический смысл. На каждом этапе во всех точках конструкций определяется разность между истинными напряжениями при соответствующих деформациях и напряжениями, найденными из упругого решения. Эта разность напряжений затем перераспределяется в соответствии с упругим законом, чтобы восстановить равновесие, и поэтому метод первоначально получил название метода перераспределения напряжений.

Величину силы $\Delta\{\mathrm{R}\}_\mathrm{n}$, вычисленную на n-м шаге итерации, можно физически интерпретировать как неуравновешенную невязку силы в конструкции, и, следовательно, она является удобной мерой ошибки [7].

В этом методе на каждом шаге итерационного процесса используется одна и та же матрица жесткости, и если она поблочно обратима, то время, необходимое для каждой итерации, составляет лишь небольшую часть времени, затрачиваемого на получение первого приближения.

Теперь возникает вопрос, какие упругие постоянные следует использовать для определения матрицы $[K_0]$. Если поведение материала в основном описывается соотношениями линейной теории упругости и отклонения от линейно-упругого поведения локализованы, то естественно использовать начальные значения упругих постоянных. Однако если нелинейность проявляется для всех напряжений, то для ускорения сходимости можно рекомендовать скорректировать упругие постоянные после первой итерации.

В некоторых задачах, особенно в задачах ползучести, действующие напряжения нельзя выразить в явном виде через деформации. С другой стороны, в этих случаях можно определить деформации (или приращения деформаций) через напряжения, т.е. установить соотношение типа (10):

$$\{\varepsilon\} = f(\{\sigma\}) \tag{10}$$

Совпадение соотношений (10) и (1) может быть достигнуто при соответствующем выборе $\{\varepsilon_0\}$. Уравнение (8) опять решается итерационным методом, но теперь упругие деформации, получаемые на каждом шаге, сравниваются с деформациями, соответствующими определяющему соотношению (10), и их разность используется для оценки невязки силы $\Delta\{R\}_n$. В остальном процесс идентичен описанному выше, и, в частности, матрица жесткости остается постоянной на любом шаге.

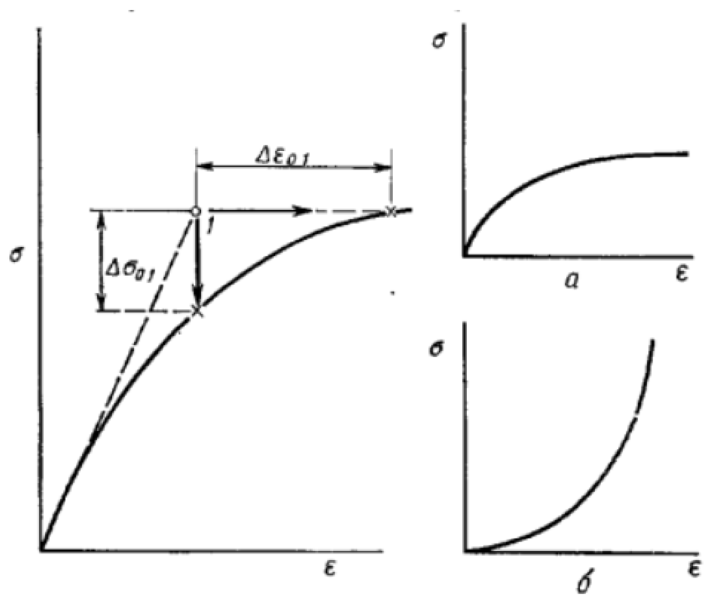

Рисунок 1 — Методы начальных деформаций и напряжений. Размягчающийся (а) и затвержевающий (б) материалы

В некоторых законах ползучести дополнительные деформации (деформации ползучести) явно отделены от упругих деформаций и, следовательно, при каждой итерации определяются непосредственно дополнительные начальные деформации. Различие между методами начальных напряжений и начальных деформаций лучше всего, вероятно, проиллюстрировать графически.

На рисунке 1 уровню напряженно-деформированного состояния, полученному в первом приближении, соответствует точка 1. В методе начальных напряжений полученные напряжения уменьшаются до правильного значения введением некоторого начального напряжения $\Delta\{\sigma_0\}_1$, тогда как в методе начальных деформаций значения деформаций корректируются поправочным членом $\Delta\{\varepsilon_0\}_1$. Ясно, что когда с ростом напряжений деформации быстро увеличиваются, предпочтительнее использовать первый метод, а когда справедливо обратное утверждение (затвердевающие материалы) — второй.

Список литературы

1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.:Мир, 1975. 541 с.
2. Биргер И. А., Мавлютов Р. Р. Сопротивление материалов: Учебное пособие. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.— 560 с.
3. Исследование и проектирование механизма качающегося конвейера / Л. Р. Абдуллина, А. А. Калистратова, Е. С. Пронькин [и др.] // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2022. – № 4. – С. 43-50. – DOI 10.24412/2071-6168-2022-4-43-50. – EDN PVBKYL.
4. Белозеров Б. П., Люкшин Б. А., Митрофанов Ю. А., Осипов Ю. В. Геометрическое и прочностное проектирование проволочных спиральных фильтрующих элементов // Известия ТПУ. 2004. №3.
5. Samsonenko D.M., Khudoyarov V.A., Barbashov N.N., Abdullina L.R., Potapov D.M., Research of influence of errors of cam manufacturing on the law of motion of output element // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, Volume 862, Mechanical and Automation Engineering for Industry, 2020
6. Черданцев Николай Васильевич, Черданцев Сергей Васильевич Об эффективности использования винтового стержня с целью повышения устойчивости выработок // Вестник КузГТУ. 2004. №1.
7. Barbashov N.N., Samoilova M.V., Abdullina L.R., Selection of rational algorithms for controlling high-precision details, Journal of Physics: Conference Series, Volume 1889, Intrumentation Technologies and Environmental Engineering, 2021

Bibliography

1. Zenkevich O. Finite element method in engineering. M.: Mir, 1975. 541 p.
2. Birger I. A., Mavlyutov R. R. Strength of materials: Textbook. M.: Science. Ch. ed. Phys.-Math. lit., 1986.— 560 p.
3. Abdullina L.R., Kalistratova A.A., Pronkin E.S. [et al.] Research and design of the swinging conveyor mechanism // Proceedings of the Tula State University.

Technical science. - 2022. - No. 4. - S. 43-50. – DOI 10.24412/2071-6168-2022-4-43-50. – EDN PVBKYL.

4. Belozerov B. P., Lyukshin B. A., Mitrofanov Yu. A., Osipov Yu. V. Geometric and strength design of wire spiral filter elements. Izvestiya TPU. 2004. No. 3.
5. Samsonenko D.M., Khudoyarov V.A., Barbashov N.N., Abdullina L.R., Potapov D.M., Research on influence of errors of cam manufacturing on the law of motion of output element // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, Volume 862, Mechanical and Automation Engineering for Industry, 2020
6. Cherdantsev Nikolay Vasilyevich, Cherdantsev Sergey Vasilyevich On the efficiency of using a screw rod to increase the stability of workings // Bulletin of KuzGTU. 2004. No. 1.
7. Barbashov N.N., Samoilova M.V., Abdullina L.R., Selection of rational algorithms for controlling high-precision details, Journal of Physics: Conference Series, Volume 1889, Instrumentation Technologies and Environmental Engineering, 2021

Для цитирования: Пронькин Е.С. КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О НАВИВКЕ ПРУЖИНЫ // Научный сетевой журнал «Столыпинский вестник» №03/2022